

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 23 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**

ΘΕΜΑ Α

A1.

Θέτουμε $F(x) = c \cdot f(x)$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, για κάθε x στο οποίο είναι παραγωγίσιμη και για $h \neq 0$ έχουμε:

$$[F(x+h) - F(x)]/h = [c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)]/h = c \cdot [f(x+h) - f(x)]/h.$$

Παίρνοντας το όριο για $h \rightarrow 0$:

$$F'(x) = c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} [f(x+h) - f(x)]/h = c \cdot f'(x).$$

Άρα:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

A2.

Το εύρος (R) ενός δείγματος n παρατηρήσεων ορίζεται ως η διαφορά της μικρότερης παρατήρησης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση, δηλαδή:

$R = \text{μεγαλύτερη παρατήρηση} - \text{μικρότερη παρατήρηση}.$

A3.

Πρόταση	Χαρακτηρισμός
α	Λάθος
β	Σωστό
γ	Σωστό
δ	Λάθος
ε	Σωστό

A4.

α. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

β. $(\sin x)' = \cos x$

ΘΕΜΑ Β

B1.

Εφόσον η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(1,0)$, ισχύει $f(1)=0$:

$$1^3 + \alpha \cdot 1^2 + 1 = 0 \Rightarrow \alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = -2.$$

Για $\alpha = -2$ έχουμε:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2.$$

B2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/x = \lim_{x \rightarrow 0} [x(x-1)^2]/x = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)^2 = 1.$$

B3.

Η παράγωγος της f είναι:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1.$$

Στο $O(0,0)$:

$$f'(0)=1.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y = x.$$

B4.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1).$$

Οι ρίζες της f' είναι $x = 1/3$ και $x = 1$. Το πρόσημό της είναι θετικό για $x < 1/3$, αρνητικό για $1/3 < x < 1$ και θετικό για $x > 1$.

x	$(-\infty, 1/3)$	$1/3$	$(1/3, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$	τοπ. μέγιστο	$\searrow$	τοπ. ελάχιστο	$\nearrow$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 1/3]$ και $[1, +\infty)$, και γνησίως φθίνουσα στο $[1/3, 1]$.

$$f(1/3)=4/27 \Rightarrow \text{τοπικό μέγιστο } 4/27 \text{ στο } x=1/3.$$

$$f(1)=0 \Rightarrow \text{τοπικό ελάχιστο } 0 \text{ στο } x=1.$$

EST.1993

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Οι κλάσεις έχουν ίσο πλάτος 100 €, αφού οι κεντρικές τιμές διαφέρουν κατά 100. Επίσης $v=40$ και $f_i=v_i/40$.

Κλάσεις εξόδων (€)	x_i	v_i	f_i	$x_i v_i$
[300,400)	350	8	0,2	2800
[400,500)	450	16	0,4	7200
[500,600)	550	12	0,3	6600
[600,700)	650	4	0,1	2600
ΣΥΝΟΛΟ	—	40	1	19200

Γ2.

$$\bar{x} = \Sigma(x_i v_i)/v = 19200/40 = 480 \text{ €}.$$

Γ3.

Στα ομαδοποιημένα δεδομένα θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης κατανέμονται ομοιόμορφα. Στην κλάση [500,600) υπάρχουν 12 φοιτητές. Το τμήμα [550,600) έχει μήκος 50, δηλαδή το μισό της κλάσης, άρα αντιστοιχεί σε:

$$12 \cdot 50/100 = 6 \text{ φοιτητές}.$$

Προσθέτουμε και τους 4 φοιτητές της κλάσης [600,700):

$$6 + 4 = 10 \text{ φοιτητές.}$$

Το αντίστοιχο ποσοστό είναι:

$$10/40 \cdot 100\% = 25\%.$$

Γ4.

Αν σε κάθε παρατήρηση προστεθεί η σταθερά 50, τότε η μέση τιμή αυξάνεται επίσης κατά 50:

$$\bar{x}_{\text{νέα}} = 480 + 50 = 530 \text{ €}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Από κάθε πλευρά του αρχικού τετραγώνου αφαιρούνται δύο τμήματα μήκους x , επομένως η πλευρά της τετραγωνικής βάσης είναι:

$$6 - 2x \text{ (m).}$$

Άρα το εμβαδόν της βάσης είναι:

$$E(x) = (6-2x)^2 = 36 - 24x + 4x^2 = 4x^2 - 24x + 36.$$

Επειδή x είναι μήκος, $x > 0$. Επιπλέον πρέπει $6-2x > 0$, οπότε $x < 3$. Άρα:

$$0 < x < 3.$$

Δ2.

Το ύψος της δεξαμενής είναι x και το εμβαδόν της βάσης $E(x)$. Επομένως:

$$V(x) = x \cdot E(x) = x(4x^2 - 24x + 36)$$

$$V(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x, \quad 0 < x < 3.$$

Δ3.

Το γραμμοσκιασμένο τμήμα προκύπτει από το αρχικό τετράγωνο εμβαδού $6^2=36 \text{ m}^2$, αφού αφαιρεθούν τα τέσσερα γωνιακά τετράγωνα πλευράς x :

$$A(x) = 36 - 4x^2.$$

Δ4.

α. Για τον μέγιστο όγκο μελετούμε τη V στο διάστημα $(0,3)$:

$$V'(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 12(x-1)(x-3).$$

Για $0 < x < 1$ έχουμε $V'(x) > 0$, ενώ για $1 < x < 3$ έχουμε $V'(x) < 0$. Άρα η V παρουσιάζει μέγιστο στο $x=1 \text{ m}$.

Τότε η πλευρά της βάσης είναι $6-2 \cdot 1=4 \text{ m}$ και το ύψος είναι 1 m .

Διαστάσεις δεξαμενής μέγιστου όγκου: $4 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 1 \text{ m}$.

$$V_{\max} = 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 \text{ m}^3.$$

β. Για $x=1$, το εμβαδόν της εσωτερικής επιφάνειας που θα βαφεί είναι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν του Σχήματος 1:

$$A(1) = 36 - 4 \cdot 1^2 = 32 \text{ m}^2.$$

Άρα το κόστος της βαφής είναι:

$$32 \cdot 12 = 384 \text{ €}.$$

ΤΕΛΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ