

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2026**

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**

ΘΕΜΑ Α

A1.

Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 105

A2.

Θεώρημα Bolzano: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.
Δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (α, β) .

A3.

Η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C^f της f στο $+\infty$, όταν:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

A4.

Πρόταση	Απάντηση
α	Λάθος
β	Σωστό
γ	Σωστό
δ	Σωστό
ε	Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1.

Για $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα είναι «1-1» και επομένως αντιστρέφεται. Για το σύνολο τιμών της f έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$$

Άρα $f((0, +\infty)) = (-\infty, 4)$. Θέτοντας $y = f(x)$:

$$y = 4 - \frac{1}{x} \iff \frac{1}{x} = 4 - y \iff x = \frac{1}{4-y}$$

Επομένως, $f^{-1}(x) = 1/(4-x)$, $x \in (-\infty, 4)$.

B2.

i) Για να ορίζεται η $g = f + f^{-1}$ πρέπει:

$$D_g = D_f \cap D_{f^{-1}} = (0, +\infty) \cap (-\infty, 4) = (0, 4)$$

Άρα:

$$g(x) = 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}, \quad x \in (0, 4)$$

ii) Για τις κατακόρυφες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty \implies x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) = +\infty \implies x = 4$$

Άρα οι ευθείες $x = 0$ (δηλαδή ο άξονας $y'y$) και $x = 4$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Δεν υπάρχουν οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες, αφού το πεδίο ορισμού της g είναι το $(0,4)$ και δεν εξετάζονται όρια για $x \rightarrow \pm\infty$.

B3.

Η εφαπτομένη της C^g είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ όταν $g'(x) = 0$. Για $x \in (0,4)$:

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(4-x)^2} > 0$$

Άρα η εξίσωση $g'(x) = 0$ είναι αδύνατη. Επομένως δεν υπάρχουν σημεία της C^g στα οποία η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

i) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό μέγιστο, από το θεώρημα Fermat:

$$f'(1) = 0 \implies \alpha + \beta = 0 \quad (1)$$

Η εφαπτομένη στη θέση $x_1 = -\sqrt{2/3}$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \pi/4$, άρα η κλίση της είναι $\tan(\pi/4) = 1$:

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 1 \implies \frac{2}{3}\alpha + \beta = 1 \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει μοναδικά:

$$\alpha = -3, \quad \beta = 3$$

Για $\alpha = -3, \beta = 3$ είναι $f'(x) = -3x^2 + 3$, η οποία αλλάζει πρόσημο από θετικό σε αρνητικό στο $x = 1$, επομένως πράγματι η f παρουσιάζει εκεί τοπικό μέγιστο.

ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -3x^2 + 3 \implies f(x) = -x^3 + 3x + c$$

Επειδή το τοπικό μέγιστο στο $x = 1$ είναι ίσο με 0, ισχύει $f(1)=0$, οπότε $c = -2$. Άρα:

$$f(x) = -x^3 + 3x - 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Γ2.

Πεδίο ορισμού: $D^f = \mathbb{R}$.

Για τη μονοτονία και τα ακρότατα:

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = 3(1 - x^2)$$

- $f'(x) < 0$ για $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα αυτά.
- $f'(x) > 0$ για $x \in (-1, 1)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$.
- Στο $x = -1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο: **$f(-1) = -4$.**
- Στο $x = 1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο: **$f(1) = 0$.**

Για την κυρτότητα και το σημείο καμπής:

$$f''(x) = -6x$$

- $f''(x) > 0$ για $x < 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$.
- $f''(x) < 0$ για $x > 0$, άρα η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$.
- Στο $x = 0$ παρουσιάζει σημείο καμπής **$K(0, -2)$.**

Τομές με τους άξονες:

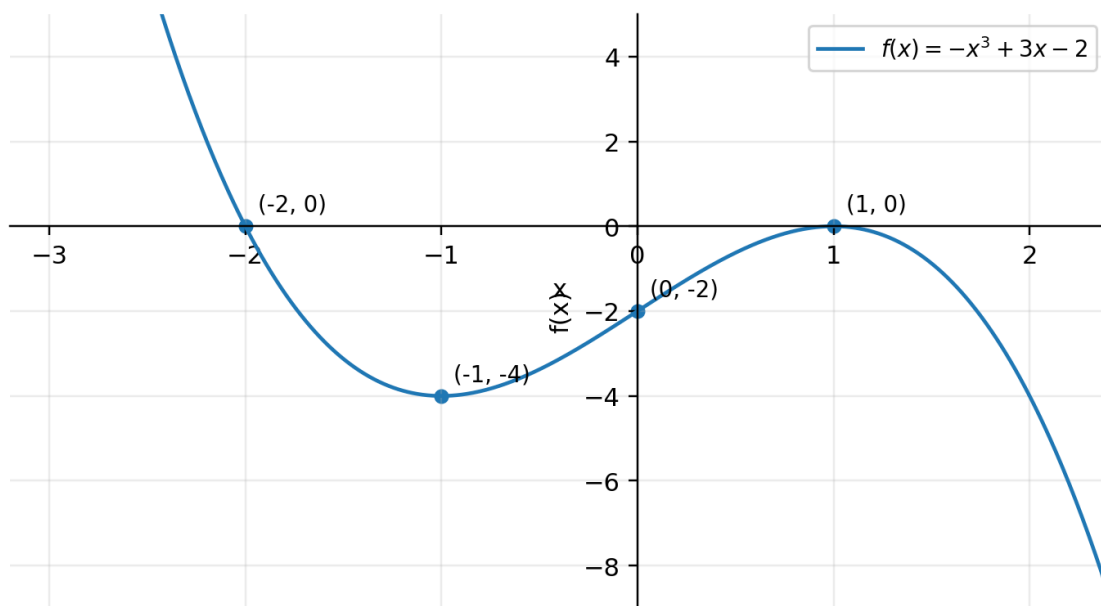
$$f(x) = 0 \iff -(x-1)^2(x+2) = 0 \iff x \in \{-2, 1\}$$

- Με τον x' : $(-2, 0)$ και $(1, 0)$.
- Με τον y' : $(0, -2)$.

Επιπλέον:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Η f είναι πολυωνυμική τρίτου βαθμού, επομένως δεν έχει ασύμπτωτες. Με βάση τα παραπάνω, η γραφική της παράσταση είναι:



Γ3.

Επειδή το $x = 1$ είναι θέση τοπικού μεγίστου με $f(1)=0$, για x κοντά στο 1 και $x \neq 1$ ισχύει $f(x) < 0$, άρα $|f(x)| = -f(x)$. Επομένως:

$$\frac{\ln(1+f(x))}{|f(x)|(x-1)^2} = \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{|f(x)|} \cdot \frac{1}{(x-1)^2}$$

Καθώς $x \rightarrow 1$, έχουμε $f(x) \rightarrow 0$ και:

$$\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} \rightarrow 1, \quad \frac{f(x)}{|f(x)|} = -1, \quad \frac{1}{(x-1)^2} \rightarrow +\infty$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+f(x))}{|f(x)|(x-1)^2} = -\infty$$

Γ4.

Για $x \in [0, +\infty)$ ισχύουν $e^x \geq 1$ και $x+1 \geq 1$. Από το Γ2 η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, άρα είναι «1-1» στο διάστημα αυτό. Επομένως:

$$f(e^x) = f(x+1) \iff e^x = x+1$$

Γνωρίζουμε ότι $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με ισότητα μόνο για $x = 0$. Συνεπώς η εξίσωση στο $[0, +\infty)$ έχει μοναδική λύση:

$$x = 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Από τη δεδομένη σχέση

$$xf'(x) - f(1-x) = x^2 + 2x - 3, \quad x \in [0, 1]$$

για $x = 0$ παίρνουμε $-f(1) = -3$, άρα $f(1) = 3$, ενώ για $x = 1$ παίρνουμε $f'(1) - f(0) = 0$, άρα $f(0) = f'(1)$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$. Επομένως, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 3 - f'(1)$$

Άρα:

$$f'(\xi) + f'(1) = 3$$

Δ2.

i) Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, η f' είναι συνεχής στο $(0, 1]$. Επίσης $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$. Από συνέπεια του θεωρήματος Bolzano η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, 1]$. Άρα τα $f'(\xi)$ και $f'(1)$ είναι ομόσημα.

Από το Δ1 έχουμε $f'(\xi) + f'(1) = 3 > 0$. Εφόσον οι δύο αριθμοί είναι ομόσημοι, είναι και οι δύο θετικοί. Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f'(x) > 0$ στο $(0, 1)$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$.

ii) Για κάθε $x \in [0, 1]$, από τη γνησίως αύξουσα f και επειδή $x \leq 1$, προκύπτει:

$$f(x) \leq f(1) = 3$$

Επομένως $f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Δ3.

Από το Δ2 ισχύει $f(x) \leq 3$ στο $[0, 1]$. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \int_0^1 (3 - f(x)) dx = 3 - \int_0^1 f(x) dx$$

Θέτουμε $I = \int_0^1 f(x) dx$. Ολοκληρώνοντας τη δεδομένη σχέση στο $[0, 1]$:

$$\int_0^1 xf'(x) dx - \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 (x^2 + 2x - 3) dx = -\frac{5}{3}$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο πρώτο ολοκλήρωμα και με την αλλαγή $u = 1-x$ στο δεύτερο:

$$\int_0^1 xf'(x) dx = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - I = 3 - I$$

$$\int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 f(u) du = I$$

Άρα:

$$3 - 2I = -\frac{5}{3} \implies I = \frac{7}{3}$$

Τελικά:

$$E(\Omega) = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3}$$

Άρα $E(\Omega) = 2/3$ τ.μ.

ΤΕΛΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ