

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΘΕΜΑ Α

A1.

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \dots + \frac{v_k}{v} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_k}{v} = \frac{v}{v} = 1.$$

A2.

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το n είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημίαθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το n είναι άρτιος αριθμός.

A3.

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) **παράγωγος** (derivative) της f και συμβολίζεται με f' .

A4.

α. Λ β. Σ γ. Σ δ. Λ ε. Σ

EST.1993

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' - (x^2)' - (3x)' + (1)'$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

B2.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
f'(x)	+	0	- 0	+
f	↗		↘	↗

⊙ Η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[3, +\infty)$.

⊙ Η συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $[-1, 3]$

⊙ Στη θέση $x = -1$ παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** (Τ.Μ.) το.

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + 1$$

$$f(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 1$$

$$f(-1) = \frac{8}{3}$$

⊙ Στη θέση $x = 3$ παρουσιάζει **τοπικό ελάχιστο** (Τ.Ε.) το

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 27 - 9 - 9 + 1$$

$$f(3) = 9 - 9 - 9 + 1 = -8$$

B3.

Εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $A(0, f(0))$

Υπολογίζουμε: $f(0)=1$

Άρα:

$A(0,1)$

Η κλίση της εφαπτομένης είναι:

$$f'(0)=0-0-3=-3$$

Έστω $y = ax + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0,1)$

$$\alpha = f'(0) = -3$$

και το σημείο $A(0,1)$ ανήκει στην ευθεία άρα $y = -3x + \beta$ και $1 = -3 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$

Οπότε, $y = -3x + 1$

$$\text{B4. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-3) = -4.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_7}{\nu}$$

$$4 = \frac{4+5+4+\kappa+0+3+7}{7} \Leftrightarrow 4 = \frac{23+\kappa}{7} \Leftrightarrow 28 = 23+\kappa \Rightarrow \kappa = 28-23 \Rightarrow \kappa = 5$$

Γ2.

Για $k=5$, οι 7 παρατηρήσεις του δείγματος είναι: 4, 5, 4, 5, 0, 3, 7

οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά είναι: 0, 3, 4, 4, 5, 5, 7

Επειδή το μέγεθος του δείγματος είναι **περιττός αριθμός** ($\nu=7$), η διάμεσος (δ) είναι η μεσαία

$$\frac{\nu+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4 \text{ η θέση}$$

παρατήρηση, δηλαδή αυτή που βρίσκεται στη θέση:

Παρατηρώντας τη διατεταγμένη σειρά, η 4η τιμή είναι το 4. Επομένως:

$$\delta = 4$$

Γ3.

Γ3. Η διακύμανση είναι:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{x})^2}{7} = \frac{(t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + (t_3 - \bar{x})^2 + (t_4 - \bar{x})^2 + (t_5 - \bar{x})^2 + (t_6 - \bar{x})^2 + (t_7 - \bar{x})^2}{7} \\ &= \frac{(0-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (5-4)^2 + (7-4)^2}{7} \\ &= \frac{16+1+0+0+1+1+9}{7} = \frac{28}{7} = 4 \end{aligned}$$

Γ4.

Υπολογισμός της τυπικής απόκλισης (s) $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$

Υπολογισμός του συντελεστή μεταβολής (CV) $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$ Η 50%

Εφόσον $CV > 10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Το εμβαδόν E του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο: $E = x \cdot y$

$$E = 100 \Leftrightarrow xy = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}$$

Η περίμετρος Π του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο: $\Pi = 2x + 2y$

Αντικαθιστούμε το y στην παραπάνω σχέση:

$$\Pi(x) = 2x + 2\left(\frac{100}{x}\right) \Rightarrow \Pi(x) = 2x + \frac{200}{x}, \quad x > 0$$

Δ2. $\Pi'(x) = \left(2x + \frac{200}{x}\right)' = 2 - \frac{200}{x^2}$

$$\Pi'(x) = 0 \text{ για } x > 0$$

$$2 - \frac{200}{x^2} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{200}{x^2} \Rightarrow 2x^2 = 200 \Rightarrow x^2 = 100$$

Αφού $x > 0$, η δεκτή ρίζα είναι η $x = \sqrt{100} = 10$

x	0	10	$+\infty$
$\Pi'(x)$	-	0	+
Π	↘		↗

Ο.Ε.

Άρα:

- ⊙ Η συνάρτηση Π είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $(0, 10]$.
- ⊙ Η συνάρτηση Π είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[10, +\infty)$.

Η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 10$. Αντικαθιστώντας τη σταθερή τιμή $x = 10$

$$y = \frac{100}{10} = 10$$

στη σχέση για το y , βρίσκουμε:

Επειδή $x = y = 10$, οι δύο πλευρές είναι ίσες. Άρα, το ορθογώνιο με τη μικρότερη περίμετρο είναι **τετράγωνο**

Δ3.

$$A = \frac{\Pi(x_1) - \Pi(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Στο διάστημα $(0, 10)$, όπως αποδείξαμε στο ερώτημα **Δ2**, η συνάρτηση $\Pi(x)$ είναι **γνησίως φθίνουσα**

ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow \Pi(x_1) > \Pi(x_2)$ Επομένως: $\Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0$ και $x_1 - x_2 < 0$

Άρα

$$\frac{\Pi(x_1) - \Pi(x_2)}{x_1 - x_2} < 0.$$

Δ4.

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x} - 10}$$

Έχουμε:

$$\Pi'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2} = \frac{2(x - 10)(x + 10)}{x^2}$$

Άρα:

$$L = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x - 10)(x + 10)}{x^2(\sqrt{10x} - 10)}$$

Πολλαπλασιάζουμε με τη συζυγή παράσταση:

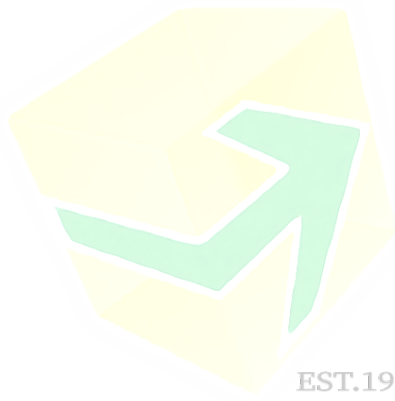
$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x - 10)(x + 10)(\sqrt{10x} + 10)}{x^2[(\sqrt{10x} - 10)(\sqrt{10x} + 10)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x - 10)(x + 10)(\sqrt{10x} + 10)}{x^2(10x - 100)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x - 10)(x + 10)(\sqrt{10x} + 10)}{10x^2(x - 10)} \end{aligned}$$

Απλοποιούμε τον παράγοντα $(x - 10)$:

$$= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x + 10)(\sqrt{10x} + 10)}{5x^2}$$

Θέτοντας $x = 10$:

$$L = \frac{20 \cdot 20}{5 \cdot 100} = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}$$



ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ